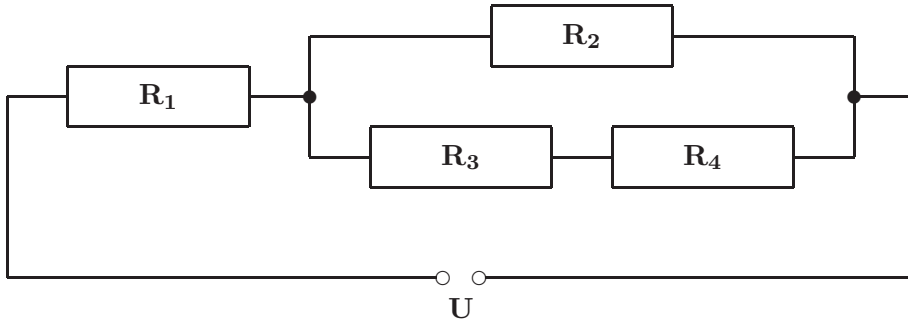


Aufgabe:

Die vier Widerstände der abgebildeten Schaltung haben die Werte $R_1 = 24\ \Omega$, $R_2 = 160\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$ und $R_4 = 200\ \Omega$. Die Stromquelle liefert die Spannung $U = 6,0\ \text{V}$.

a) Ermittle den Ersatzwiderstand der vier Widerstände!

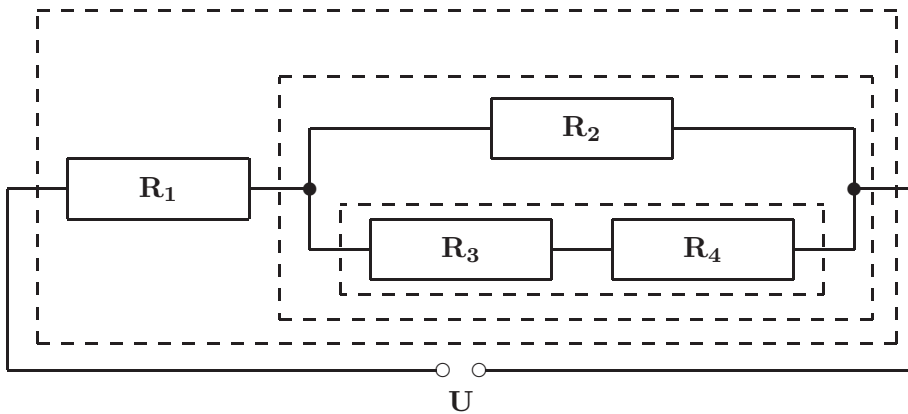
b) Berechne für alle Einzelwiderstände die anliegenden Spannungen und die Stromstärken!



Lösung:

a) Die Berechnung des Ersatzwiderstandes erfolgt nach dem „Bottom-Up-Prinzip“. Man berechnet – beginnend mit den Einzelwiderständen – für immer größere Teile der Schaltung den jeweiligen Ersatzwiderstand. Dabei benötigt man die Formeln für den Ersatzwiderstand bei Serien- und Parallelschaltung.

Wichtig ist dabei, dass nur zusammengehörige Schaltungsteile zu größeren Einheiten zusammengefasst werden. Es wäre zum Beispiel sinnlos, einen Ersatzwiderstand von R_1 und R_2 zu berechnen.



Als erstes bestimmt man den Ersatzwiderstand von R_3 und R_4 , der sich bei hintereinandergeschalteten Widerständen als Summe der Einzelwiderstände ergibt.

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 40\ \Omega + 200\ \Omega = 240\ \Omega$$

Die nächstgrößere sinnvolle Einheit besteht aus den Widerständen R_2 , R_3 und R_4 . Es handelt sich um eine Parallelschaltung der Widerstände R_2 und R_{34} ; entsprechend ist die Formel für den Ersatzwiderstand zu wählen.

$$R_{234} = \frac{R_2 R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{160 \Omega \cdot 240 \Omega}{160 \Omega + 240 \Omega} = 96 \Omega$$

Betrachtet man die Schaltung als Ganzes, so erkennt man eine Serienschaltung der Widerstände R_1 und R_{234} . Der Ersatzwiderstand der kompletten Schaltung ergibt sich folglich als Summe.

$$R = R_1 + R_{234} = 24 \Omega + 96 \Omega = \underline{120 \Omega}$$

b) Für die folgenden Berechnungen arbeitet man nach dem „Top-Down-Prinzip“. Man betrachtet zunächst die gesamte Schaltung und geht anschließend immer wieder zu kleineren Teilen über.

Die Gesamtstromstärke der Schaltung ergibt sich aus der Widerstandsdefinition $R = \frac{U}{I}$.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{6,0 \text{ V}}{120 \Omega} = 0,050 \text{ A} = 50 \text{ mA}$$

Da die Schaltung insgesamt eine Serienschaltung ist, muss die Stromstärke in den Teilwiderständen R_1 und R_{234} gleich der Gesamtstromstärke sein.

$$I_1 = I = \underline{50 \text{ mA}}$$

$$I_{234} = I = 50 \text{ mA}$$

Der Spannungsabfall am Widerstand R_1 lässt sich nun mit Hilfe von $R_1 = \frac{U_1}{I_1}$ errechnen.

$$U_1 = R_1 I_1 = 24 \Omega \cdot 0,050 \text{ A} = \underline{1,2 \text{ V}}$$

Eine andere Möglichkeit, U_1 zu bestimmen, wäre die Verwendung einer Verhältnisgleichung. Bei Hintereinanderschaltung verhalten sich die Teilspannungen wie die Widerstände.

$$U_1 : U_{234} = R_1 : R_{234} = 24 \Omega : 96 \Omega = 1 : 4$$

Auf U_1 entfällt daher einer von fünf gleichen Teilen ($1 + 4 = 5$) der Gesamtspannung $U = 6,0 \text{ V}$. Es muss also $U_1 = 6,0 \text{ V} : 5 = 1,2 \text{ V}$ gelten.

Aus $R_{234} = \frac{U_{234}}{I_{234}}$ folgt sofort

$$U_{234} = R_{234} I_{234} = 96 \Omega \cdot 0,050 \text{ A} = 4,8 \text{ V}.$$

Alternativ dazu könnte man die Tatsache verwenden, dass bei Serienschaltung die Gesamtspannung gleich der Summe der Einzelspannungen ist.

$$U_{234} = U - U_1 = 6,0 \text{ V} - 1,2 \text{ V} = 4,8 \text{ V}$$

Da R_{234} aus den parallel geschalteten Widerstände R_2 und R_{34} besteht, müssen die entsprechenden Spannungen gleich groß sein, und zwar gleich U_{234} .

$$\begin{aligned}U_2 &= U_{234} = \underline{4,8\text{ V}} \\U_{34} &= U_{234} = 4,8\text{ V}\end{aligned}$$

Da nun U_2 und R_2 bekannt sind, lässt sich daraus die Stromstärke I_2 berechnen.

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{4,8\text{ V}}{160\ \Omega} = 0,030\text{ A} = \underline{30\text{ mA}}$$

Zum gleichen Ergebnis käme man mit Hilfe einer Verhältnisgleichung. Bei nebeneinandergeschalteten Widerständen verhalten sich die Teilstromstärken umgekehrt wie die entsprechenden Widerstände.

$$I_2 : I_{34} = R_{34} : R_2 = 240\ \Omega : 160\ \Omega = 3 : 2$$

Auf I_2 entfallen drei von fünf Teilen ($3+2=5$) der Gesamtstromstärke $I_{234} = 50\text{ mA}$.

$$I_2 = (50\text{ mA} : 5) \cdot 3 = 30\text{ mA}.$$

Für die Stromstärke I_{34} kann man erneut die Formel für den Widerstand verwenden.

$$I_{34} = \frac{U_{34}}{R_{34}} = \frac{4,8\text{ V}}{240\ \Omega} = 0,020\text{ A} = 20\text{ mA}$$

Genauso gut könnte man von der Gesamtstromstärke $I_{234} = 50\text{ mA}$ die schon bekannte Teilstromstärke I_2 subtrahieren.

$$I_{34} = I_{234} - I_2 = 50\text{ mA} - 30\text{ mA} = 20\text{ mA}$$

Mit I_{34} kennt man automatisch die Stromstärken I_3 und I_4 , da bei Hintereinanderschaltung die Stromstärke überall gleich groß ist.

$$\begin{aligned}I_3 &= I_{34} = \underline{20\text{ mA}} \\I_4 &= I_{34} = \underline{20\text{ mA}}\end{aligned}$$

Problemlos ist nun die Berechnung der Teilspannungen U_3 und U_4 gemäß der Formel für den Widerstand.

$$\begin{aligned}U_3 &= R_3 I_3 = 40\ \Omega \cdot 0,020\text{ A} = \underline{0,8\text{ V}} \\U_4 &= R_4 I_4 = 200\ \Omega \cdot 0,020\text{ A} = \underline{4,0\text{ V}}\end{aligned}$$

Als Variante käme wieder die Berechnung mit Hilfe einer Verhältnisgleichung in Frage. (Bei Serienschaltung ist die Gesamtspannung $U_{34} = 4,8\text{ V}$ gleich der Summe der Einzelspannungen U_3 und U_4 ; diese verhalten sich wie die zugehörigen Widerstände R_3 und R_4 .)

$$U_3 : U_4 = R_3 : R_4 = 40\ \Omega : 200\ \Omega = 1 : 5$$

$$U_3 = \frac{4,8\text{ V}}{1+5} \cdot 1 = 0,8\text{ V}$$

$$U_4 = \frac{4,8\text{ V}}{1+5} \cdot 5 = 4,0\text{ V}$$

Hinweis: Ein häufig gemachter Fehler bei Aufgaben dieses Typs besteht darin, dass man die Widerstandsdefinition (oft fälschlich als ohmsches Gesetz bezeichnet)

$$R = \frac{U}{I}$$

mit ihren Folgerungen

$$U = RI; \quad I = \frac{U}{R}$$

falsch anwendet. Es ist zum Beispiel sinnlos, den Widerstand R_1 mit der Stromstärke I_2 zu multiplizieren.